第30講　整数問題(1)

1 [1]　5^n が $30!$ の約数となるような自然数 n のうち最大のものを求めよ.

[2]　n が3以上の奇数のとき, n^3-n は24で割り切れることを示せ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　33^{20} を 90 で割ったときの余りを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　n を 2 以上の自然数とするとき，n^4+4 は素数にならないことを示せ.

［2］　3 より大きな素数 p について，p^2 を 12 で割ったときの余りがどうなるかを調べたい.

(1)　$p=5$，7，11 に対して，p^2 を 12 で割ったときの余りを求めよ.

(2)　(1)の結果から，一般に 3 より大きな素数 p に対して，p^2 を 12 で割ったときの余りがどうなるかを予想し，さらにその予想が正しいことを証明せよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　整数問題(1)

［1］ 30 の階乗の素因数分解を $30!=2^a\times3^b\times5^c\times\cdots\cdots\times23^i\times29^j$ と表したとき，

$a=$ **アイ** ，$b=$ **ウエ** ，$c=$ **オ**

である．また，30! は末尾から続けて **カ** 個の 0 が並ぶ．

［2］ $P(n)=(n-1)n(n+1)$ とする．n が奇数のとき，$P(n)$ が 24 の倍数であることを示したい．n が奇数のとき，整数 m を用いて $n=2m-1$ と表すことができる．このとき，

$P(n)=P(2m-1)=$ **キ** $m(m-1)($ **ク** $m-1)$

$=$ **キ** $\{m(m-1)(m-2)+(m-1)m(m+1)\}$

と変形できる．$m(m-1)(m-2)$，$(m-1)m(m+1)$ は連続 3 整数の積，すなわち 6 の倍数である．

したがって $P(n)$ は (**キ** の倍数)$\times$(6 の倍数) の形で表すことができる．

したがって，n が奇数のとき，$P(n)$ は 24 の倍数である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　整数問題(1)

1 ［1］　5^n が 30! の約数となるような自然数 n のうち最大のものを求めよ．

1 から 30 のうち，5 の倍数は　$5\times1,\ 5\times2,\ 5\times3,\ 5\times4,\ 5\times5,\ 5\times6$　の 6 個である．

よって，30! は素因数 5 を 7 個もつ．したがって求める n の最大値は　$\boldsymbol{n=7}$

【別解】　1 から 30 のうち，5 の倍数は　$30\div5=6$ より　6 個

$5^2=25$ の倍数は　$30\div25=1\cdots5$　より　1 個

よって，30! は素因数 5 を 7 個もつ．したがって求める n の最大値は　$\boldsymbol{n=7}$

1 ［2］　n が 3 以上の奇数のとき，n^3-n は 24 で割り切れることを示せ．

$n=2m+1$（m は自然数）とおくと

$$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$$
$$=2m(2m+1)(2m+2)=4m(m+1)(2m+1)$$

$m(m+1)$ は連続 2 整数の積より 2 の倍数．よって　n^3-n は 8 の倍数である．

また，$(n-1)n(n+1)$ は連続 3 整数の積より 6 の倍数．

よって　n^3-n は 6 の倍数，すなわち 3 の倍数である．

したがって　n^3-n は 24 の倍数である．

2　33^{20} を 90 で割ったときの余りを求めよ．

$$33^{20}=(3+30)^{20}$$
$$={}_{20}C_0\cdot3^{20}+{}_{20}C_1\cdot3^{19}\cdot30^1+{}_{20}C_2\cdot3^{18}\cdot30^2+\cdots\cdots+{}_{20}C_{20}\cdot30^{20}$$
$$=3^{20}+{}_{20}C_1\cdot3^{18}\cdot90+{}_{20}C_2\cdot3^{19}\cdot10\cdot90+\cdots\cdots+30^{18}\cdot10\cdot90$$
$$=3^{20}+(90\text{ の倍数})$$

よって　33^{20} を 90 で割った余りは，3^{20} を 90 で割った余りに等しい．

$$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$$
$$=9\cdot9^9=9(10-1)^9=9\cdot\{10^9+{}_9C_1\cdot10^8\cdot(-1)^1+\cdots\cdots+{}_9C_8\cdot10^1\cdot(-1)^8+(-1)^9\}$$
$$=9\{(10\text{ の倍数})-1\}=(90\text{ の倍数})-9=(90\text{ の倍数})+81$$

よって求める余りは　**81**

3 ［1］　n を 2 以上の自然数とするとき，n^4+4 は素数にならないことを示せ．

$$n^4+4=(n^2)^2+4$$
$$=(n^2)^2+4n^2+4-4n^2$$
$$=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$$

$n\geqq2$ のとき　$n^2+2n+2\geqq2^2+2\cdot2+2=10\geqq2$

$n^2-2n+2=(n-1)^2+1\geqq2$

よって　n^4+4 は 2 以上の 2 整数の積で表すことができる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

したがって　n^4+4 は素数ではない.

3 ［2］ 3より大きな素数 p について, p^2 を12で割ったときの余りがどうなるかを調べたい.

(1) $p=5,\ 7,\ 11$ に対して, p^2 を12で割ったときの余りを求めよ.

(2) (1)の結果から, 一般に3より大きな素数 p に対して, p^2 を12で割ったときの余りがどうなるかを予想し, さらにその予想が正しいことを証明せよ.

(1) $p=5$ のとき　$p^2=25=12\cdot2+1$

$p=7$ のとき　$p^2=49=12\cdot4+1$

$p=11$ のとき　$p^2=121=12\cdot10+1$

よって　$p=5,\ 7,\ 11$ に対して, p^2 を12で割った余りはすべて **1** である.

(2) (1)より3より大きな素数 p に対して, p^2 を12で割った余りは **1** であると予想できる.

3より大きな素数は奇数より, p を6で割った余りで分類すると

$p=6k+1,\ 6k+3,\ 6k-1$ (k は自然数) のいずれかで表せる.

また, $6k+3=3(2k+1)$ は3より大きい3の倍数より素数ではない.

よって　$p=6k+1,\ 6k-1$ のいずれかで表せる.

このとき　$p^2=(6k\pm1)^2=36k^2\pm12k+1=12(3k^2\pm k)+1$ (複号同順) より

3より大きな素数 p に対して, p^2 を12で割った余りは1である.

よって予想は正しいことが証明された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　整数問題(1)

［1］　30 の階乗の素因数分解を $30!=2^a\times3^b\times5^c\times\cdots\cdots\times23^i\times29^j$　と表したとき，

$a=$ アイ ，$b=$ ウエ ，$c=$ オ

である．また，30! は末尾から続けて カ 個の 0 が並ぶ．

1 から 30 までの中に，

2 の倍数が 15 個　　2^2 の倍数が 7 個　　2^3 の倍数が 3 個　　2^4 の倍数が 1 個

3 の倍数が 10 個　　3^2 の倍数が 3 個　　3^3 の倍数が 1 個

5 の倍数が 6 個　　5^2 の倍数が 1 個

含まれている．よって

$a=15+7+3+1=\mathbf{26}$　　$b=10+3+1=\mathbf{14}$　　$c=6+1=\mathbf{7}$

である．よって　$30!=2^{26}\cdot5^7\cdot M=10^7\cdot N$　（M，N は整数．ただし M は 2 でも 5 でも割り切れず，N は 10 で割り切れない）　と表せるので，30! は末尾から続けて **7** 個の 0 が並ぶ．

［2］　$P(n)=(n-1)n(n+1)$　とする．n が奇数のとき，$P(n)$ が 24 の倍数であることを示したい．n が奇数のとき，整数 m を用いて $n=2m-1$　と表すことができる．このとき，

$P(n)=P(2m-1)=$ キ $m(m-1)($ ク $m-1)$

$=$ キ $\{m(m-1)(m-2)+(m-1)m(m+1)\}$

と変形できる．$m(m-1)(m-2)$，$(m-1)m(m+1)$ は連続 3 整数の積，すなわち 6 の倍数である．

したがって $P(n)$ は (キ の倍数)×(6 の倍数) の形で表すことができる．

したがって，n が奇数のとき，$P(n)$ は 24 の倍数である．

$n=2m-1$ のとき

$P(n)=P(2m-1)=(2m-1)\cdot2m(2m-2)$

$=\mathbf{4}m(m-1)(\mathbf{2}m-1)$

$=4m(m-1)\{(m-2)+(m+1)\}$

$=4\{m(m-1)(m-2)+(m-1)m(m+1)\}$

$m(m-1)(m-2)$，$(m-1)m(m+1)$ は連続 3 整数の積，すなわち 6 の倍数であるので，

$P(n)$ は (4 の倍数)×(6 の倍数)　の形で表すことができる．

したがって，n が奇数のとき，$P(n)$ は 24 の倍数である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。